

گزینه ۴

۱

برای رسیدن از معادلهٔ مربوط به α به معادلهٔ مربوط به β دو قدم طی می‌کنیم:
 قدم اول: طرفین معادلهٔ $\sqrt[3]{6} = 3^\alpha$ را به توان دو می‌رسانیم. داریم: $3^{2\alpha} = 6$
 قدم دوم: طرفین معادلهٔ اخیر را به توان β می‌رسانیم. داریم:

$$(3^{2\alpha})^\beta = 6^\beta \Rightarrow 3^{2\alpha\beta} = 6^\beta \xrightarrow{6^\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{81}}} 3^{2\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$$

$$\Rightarrow 3^{2\alpha\beta} = 3^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow 2\alpha\beta = -\frac{4}{3} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۱

۲

عبارت موردنظر را تا حد امکان ساده می‌کنیم. $((\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta)$ و $((\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta)$ مزدوج یکدیگرند، پس داریم:

$$A = (\alpha^2 - \beta^2)((\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta)((\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta) = (\alpha^2 - \beta^2)((\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2)$$

$$= (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2) = \alpha^6 - \beta^6$$

حال مقادیر α و β را جایگذاری می‌کنیم. باتوجه‌به اینکه $6 + \sqrt{11} = (\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})^2$ و $6 - \sqrt{11} = (\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})^2$ ، داریم:

$$A = \alpha^6 - \beta^6 = (\sqrt[3]{6 + \sqrt{11}})^6 - (\sqrt[3]{6 - \sqrt{11}})^6 = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$$

$$A = \sqrt{(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})^2} - \sqrt{(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})^2} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

گزینه ۴

۳

از اتحاد $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ کمک می‌گیریم. داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \underbrace{(x - \frac{1}{x})^3}_{\sqrt[3]{3}} + 3x(\frac{1}{x})\underbrace{(x - \frac{1}{x})}_{\sqrt[3]{3}}$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = \underbrace{\sqrt[3]{3^3}}_{3\sqrt[3]{3}} + 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 6\sqrt[3]{3}$$

دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x^3 - x) - (2x^2 - 2) \\&= x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = (x - 2)(x^2 - 1)\end{aligned}$$

$$= (x - 2)(x - 1)(x + 1)$$

$$\begin{aligned}x^3 + x - 10 &= (x^3 - 8) + (x - 2) \\&= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)\end{aligned}$$

همان‌طور که واضح است عبارت $x - 2$ در تجزیه دو عبارت به عنوان عامل مشترک حضور دارد.

کلیه اعداد را تا می‌توانیم ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}A &= 3\sqrt[3]{40} + 4\sqrt[3]{11} - 3\sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{135} \\&= 6\sqrt[3]{5} + 12\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{5} \Rightarrow A = 3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{135}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2A}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}A}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2} \times 135}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{270}}\right)^{-3} = (\sqrt[3]{270})^3 = 270$$

باید بتوانیم به جای $\sqrt{48} + 7$ ، یک عبارت مربع کامل قرار دهیم. داریم:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{3} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{3} \\&= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 \\&\Rightarrow A^2 = 2^2 = 4\end{aligned}$$

عبارت را تجزیه می‌کنیم و سعی بر این داریم که تا آنجا که می‌توان $x^6 + 1$ تولید کرد:

$$\begin{aligned}x^6 + x^5 - 2x^4 + x^3 + x - 2 &= (x^6 + x^3) + (x^5 + x) - (2x^4 + 2) = x^3(x^3 + 1) + x(x^4 + 1) - 2(x^4 + 1) \\&= (x^3 + 1)(x^3 + x - 2) = (x^3 + 1)(x + 2)(x - 1)\end{aligned}$$

بنابراین دو عامل دیگر $x + 2$ و $x - 1$ هستند که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$(x + 2) + (x - 1) = 2x + 1$$

تذکر: توجه کنید که عبارت $x^3 + x - 2$ را می‌توان به صورت دیگر مانند $(-x + 1)(-x - 2)$ هم تجزیه کرد، اما در گزینه‌ها مشاهده نمی‌شود.

فرض کنیم: $\sqrt[3]{a} = x$ و $\sqrt[3]{a-3} = y$. در این صورت $\sqrt[3]{a^2} = x^2$ و $\sqrt[3]{a^2-3a} = xy$ و $\sqrt[3]{a^2-6a+9} = y^2$ بنا براین داریم:

$$x^2 + xy + y^2 = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2-3a} + \sqrt[3]{a^2-6a+9}, \quad x - y = \frac{3}{4}$$

با دیدن دو عبارت $x - y$ و $x^2 + xy + y^2$ باید بلافاصله یاد اتحاد چاق و لاغر افتاد. با استفاده از این اتحاد داریم:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

$$\frac{x^3 - y^3 = a - (a - 3) = 3}{x - y = \frac{3}{4}} \rightarrow \frac{3}{4} (x^2 + xy + y^2) = 3$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2-3a} + \sqrt[3]{a^2-6a+9} = 4$$

با فرض $\frac{a}{b} = x$ داریم: $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$. در این صورت $2\sqrt{3} = x - \frac{1}{x}$ ، حال خواهیم داشت:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2}{a^2 b^2} - \frac{b^2}{a^2 b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$= x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

مقدار $x - \frac{1}{x}$ را که داریم. پس کافی است حاصل $x + \frac{1}{x}$ را محاسبه کنیم. با استفاده از توان دوم $x - \frac{1}{x}$ ، حاصل $x + \frac{1}{x}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 12$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 16 \xrightarrow{x = \frac{a}{b} > 0} x + \frac{1}{x} = 4$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$$

مخرج کسر را با عملیات فاکتورگیری به ساده‌ترین شکل ممکن درمی‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}}{2 + \sqrt{14} - (\sqrt{6} + \sqrt{21})} &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{7}) - \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}}{(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = -\sqrt{2} - \sqrt{3} \end{aligned}$$